Abiturprüfung 2016

Mecklenburg-Vorpommern

Wahlaufgaben mit CAS

Zuerst nur die Prüfungsaufgaben,
dann die sehr ausführlichen Musterlösungen
mit Hintergrundwissen
zum Trainieren

Datei Nr. 75161

Stand 8. August 2017

Friedrich W. Buckel

Internetbibliothek für Schulmathematik

www.mathe-cd.schule

Vorwort

Es wurden zwei Gruppen von Aufgaben gestellt A und B

Teil A ist von **allen** Prüfungsteilenhmern zu bearbeiten.

Aufgabe A0 ist ohne Zuhilfenahme von Tafelwerk oder Taschenrechner zu bearbeiten. Bearbeitungsdauer 45 Minuten.
Zusätzlich ist von den Aufgaben A1, A2 und A3 sind **zwei** auszuwählen

Teil B ist für Prüfungsteilnehmen, die die Prüfung unter erhöhten Anforderungen (LK-Niveau) ablegen.

Diese Schüler müssen die **Pflichtaufgabe B0** ohne Hilfsmittel bearbeiten und zusätzlich aus den Aufgaben B1 und B2 **eine** auswählen.

Dieser Aufgabensatz enthält Aufgaben, die mit CAS zu bearbeiten sind.
Ich habe dennoch auch alle Lösungen „manuell" gelöst, und zwar aus zwei Gründen:

1. Schüler, die diese Aufgaben durcharbeiten, wollen wiederholen. Dazu gehört, dass man die manuellen Methoden kennt, auch wenn in der Prüfung das Hilfsmittel CAS zugelassen ist, was für die Mathematik-Fähigkeiten eher negative Wirkung hat.

2. Es gibt sicher auch interessierte Leser, die nicht mit CAS arbeiten.

A1 Analysis

Gegeben sind die Funktionen f und g mit ihren Gleichungen

$$f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1 \quad \text{und} \quad g(x) = -\frac{9}{1280}x^4 + \frac{9}{40}x^2 - \frac{9}{5} \quad \text{mit} \quad x \in \mathbb{R}.$$

1.1 Berechnen Sie für den Graphen von f die Koordinaten der-Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sowie der Extrempunkte und bestimmen Sie die Art der Extrema. Zeichnen Sie diesen Graphen im Intervall $-2 \le x \le 2$ in ein geeignetes Koordinatensystem.

1.2 Die Gerade mit der Gleichung y = 1,5 schließt mit dem Graphen von f mehrere Flächen vollständig ein. Bestimmen Sie den Gesamtinhalt dieser Flächen.

1.3 Weisen Sie nach, dass sich die Graphen von f und g nie unter einem rechten Winkel schneiden.

1.4 In der Praxis werden Flüssigkeiten in oben offenen Auffangbecken gespeichert, deren Boden gewölbt ist und deren ebene Stirnflächen senkrecht nach unten verlaufen.
Die mit A, B, C und D bezeichneten Eckpunkte des Beckens bilden ein Rechteck mit $\overline{AB} = 5$ m.

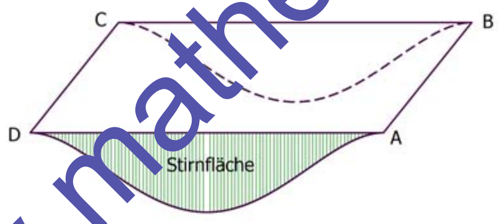


Abbildung 1

Ein solches Becken hat überall denselben Querschnitt.
Im Modell wird dieser Querschnitt unten durch eine Parabel und oben durch eine Gerade begrenzt (siehe Abbildung 1). Im Koordinatensystem liegen die Gerade auf der x-Achse und die Parabel symmetrisch zur y-Achse.
Die Parabel wird durch den Graphen der Funktion g im Intervall $-4 \le x \le 4$ erfasst.
Eine Längeneinheit entspricht dabei einem Meter.

1.4.1 Aus Sicherheitsgründen dürfen die Wände ungesicherter Auffangbecken nirgends steiler als 30° sein. Andernfalls müssen sie umzäunt werden.
Überprüfen Sie, ob die Errichtung eines Zauns für dieses Auffangbecken auch entlang der Seiten AB und CD erforderlich ist.

1.4.2 Gegen Witterungseinflüsse wird dieses Becken mit einer an den Stirnseiten offenen Kunststoffhaube geschützt (siehe Abbildung 2). Ihr Querschnitt wird durch den Graphen der Funktion $q(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 2$ im Intervall $-4 \le x \le 4$ modelliert $(x \in \mathbb{R})$. Bestimmen Sie die Größe der Fläche der Abdeckung.

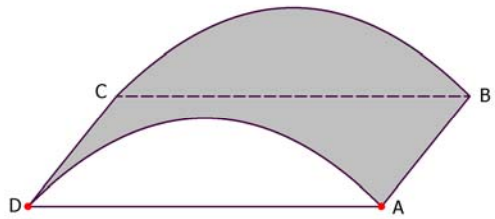


Abbildung 2

1.4.3 Das Auffangbecken ist bis zu einem Drittel seiner Höhe gefüllt. Ermitteln Sie, wie viel Liter Flüssigkeit noch in dieses Becken fließen können, sodass es randvoll gefüllt ist.

A2 Analytische Geometrie

Gegeben sind in einem kartesischen Koordinatensystem die Punkte $A(5\,|\,-2\,|\,-2)$, $B(3\,|\,4\,|\,-1)$ und $C(-3\,|\,1\,|\,1)$.

2.1 Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E, in der die Punkte A, B und C liegen.
Berechnen Sie die Koordinaten des Durchstoßpunktes der z-Achse durch E.
Weisen Sie nach, dass der Punkt D mit den Koordinaten $D(2\,|\,-3{,}5\,|\,-1)$ in E liegt.

2.2 Die Punkte A, B, C und D bilden die Grundfläche einer Pyramide ABCDS mit der Spitze $S(3\,|\,-6\,|\,7)$.

2.2.1 Untersuchen Sie, ob ABCD ein Parallelogramm ist.

2.2.2 Stellen Sie die Pyramide grafisch dar.

2.2.3 Bestimmen Sie rechnerisch die Höhe h der Pyramide und die Größe des Winkels, der von den Seitenkanten AS und BS eingeschlossen wird.

2.2.4 Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.

2.3 Gegeben sind jetzt weiterhin die Punkte $P_k(-8\,|\,1\,|\,k)$ mit $k \in \mathbb{R}$.

2.3.1 Bestimmen Sie den Wert von k so, dass die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AP_k}$ orthogonal sind.

2.3.2 Berechnen Sie für jedes der Dreiecke ABP_k den Flächeninhalt in Abhängigkeit von k.
Für einen Wert von k ist dieser Flächeninhalt minimal.
Berechnen Sie für diesen Wert den Flächeninhalt.

2.3.3 Bestimmen Sie alle Werte von k, für die folgende Aussage gilt:
Der Punkt $H(1\,|\,4\,|\,5)$ liegt in der jeweiligen Ebene ABP_k.

A3 Stochastik

Die Verwaltung einer Stadt in Mecklenburg-Vorpommern gab als Veranstalter eines Volksfestes 2008 eine repräsentative Umfrage in Auftrag, die über Wirtschaftswert des Volksfestes, Besucherstruktur, Image und Unterhaltungswert Auskunft geben sollte.
Die überwiegende Mehrheit der Festbesucher kam mit 72% aus M-V (M), 9% der Gäste reisten aus den übrigen deutschen Bundesländern (D) an. Die restlichen 19% der Festgäste kamen aus dem Ausland (A).

3.1 Bei der Umfrage wurden zwei Besucher nach ihrem Herkunftsort mit den Antwortmöglichkeiten M, D, A befragt.
Stellen Sie für dieses Zufallsexperiment ein vollständiges Baumdiagramm auf und geben Sie eine Ergebnismenge Ω an.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

- E1: Beide Besucher stammen aus Mecklenburg-Vorpommern.
- E2: Mindestens ein Besucher kommt aus dem Ausland.

3.2 Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der ausländischen Besucher bei einer Befragung von 5 Personen.

Begründen Sie, dass X als binomialverteilt angesehen werden kann.
Berechnen Sie für jeden Wert von X die Wahrscheinlichkeit und stellen Sie diese Wahrscheinlichkeitsverteilung grafisch dar.

3.3 Vier Besucher wurden bezüglich ihrer Anfahrt befragt. Ein Großteil der Besucher benutzte öffentliche Verkehrsmittel (O), die anderen private Fahrzeuge (P).

Geben Sie die folgenden Ereignisse als Teilmengen der Ergebnismenge an.

- E3: Genau drei Personen fahren mit einem privaten Fahrzeug.
- E4: Die dritte Person fährt mit öffentlichen Verkehrsmitteln.

Formulieren Sie das Gegenereignis von E4 in Worten.

Der Aufgabentext wird auf der folgenden Seite fortgesetzt.

3.4 Das Volksfest war ein Fest für alle Generationen, Jung und Alt feierten gemeinsam.
So hatte die Altersgruppe „30 Jahre und älter" einen Anteil von 53%.
Weibliche Besucher waren mit 49% vertreten.
Rund 6% aller Festbesucher waren Kinder (unter 14 Jahre).

3.4.1 Man geht bei der Befragung davon aus, dass die Eigenschaften „Geschlecht" und ,,Alter" voneinander unabhängig sind.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer Befragung die Person

- männlich und „unter 30" ist.
- weiblich und nicht „unter 30" ist.

Am Eingang einer bei allen Festbesuchern besonders beliebten Attraktion wird geprüft, wie viele der Besucher Kinder sind.

3.4.2 Es werden 120 Besucher dieser Attraktion befragt. Die Befragung kann als Bernoulli-Kette aufgefasst werden.

Mit wie vielen Kindern muss bei der Prüfung gerechnet werden?

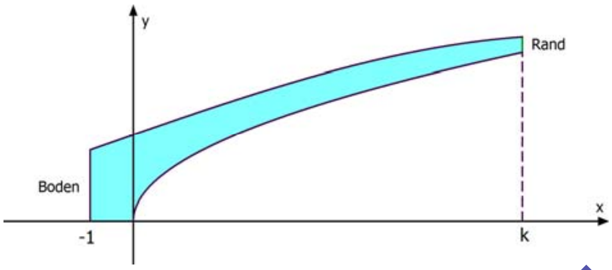
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den 120 Befragten

- genau 10 Kinder sind.
- mindestens 2, aber weniger als 8 Kinder gefunden werden.

3.4.3 Berechnen Sie, wie viele Personen befragt werden müssen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 80% mindestens zwei Kinder unter den Besuchern zu finden.

B1 Analysis und Stochastik

In einem kartesischen Koordinatensystem wird eine Fläche durch die Graphen der Funktionen f und a, die x-Achse sowie die Geraden $x_1 = -1$ und $x_2 = k$ $(k > 0)$ begrenzt.



Es gilt $f(x) = 1{,}3\sqrt{x}$ und $a(x) = -0{,}001\,x^3 - 0{,}002\,x^2 + 0{,}35\,x + 2$ mit $k, x \in \mathbb{R}$.

Diese Fläche erzeugt bei der Rotation um die x-Achse einen Körper. Hierbei stellen im Achsenschnitt (siehe Zeichnung) der Graph von f die Innenwand und der Graph von a die Außenwand eines Glases dar. Die Geraden bilden den Boden bzw. den oberen Rand des Glases.
Die Dicke der Glaswand wird für $x > 0$ zwischen Außen- und Innenwand parallel zum Boden gemessen; die Höhe vom Boden aus. Dabei entspricht eine Einheit einem Zentimeter.
Um Isoliergläser herzustellen, wird der Raum, den die rotierende Fläche erzeugt, evakuiert.

1.1 Ermitteln Sie den Innendurchmesser des Glases in einer Höhe von 8 cm.
Berechnen Sie die Höhe des Glases unter der Voraussetzung, dass der Rand etwa 2 mm stark ist.
Weisen Sie nach, dass die Dicke der Glaswand von unten nach oben betrachtet ständig geringer wird.

1.2 Dieses etwa 11 cm hohe Glas soll zu zwei Dritteln des möglichen Gesamtvolumens mit Flüssigkeit gefüllt werden.
Ermitteln Sie, wie weit die Flüssigkeit unterhalb des Randes steht.
Berechnen Sie die Größe des evakuierten Raumes.

1.3 In der Höhe von 8,5 cm wird zur Verzierung ein Schliff parallel zum Boden rund um das Glas ausgeführt. Drei weitere Schliffe führen von diesem ersten aus senkrecht bis zum Boden.
Berechnen Sie die Zeit zum Anbringen aller dieser Verzierungen, wenn für 1 cm etwa 6 Sekunden benötigt werden.

1.4 Man weiß aus Erfahrung, dass bei der Produktion dieser Isoliergläser fehlerhafte Produkte mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 1,5 % auftreten. Eine Tagesproduktion umfasst 2000 Gläser.

1.4.1 Geben Sie den Erwartungswert an und berechnen Sie die Standardabweichung für die zufällige Anzahl fehlerhafter Gläser in einer Tagesproduktion.

1.4.2 Ermitteln Sie die Höchstzahl fehlerhafter Gläser in der Tagesproduktion, bis zu der man mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % noch davon ausgehen kann, dass sich die Fehlerquote nicht erhöht hat.

B2 Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem kann die Lage der Startbahn eines Flughafens folgendermaßen beschrieben werden:
Die x-Achse verläuft von Westen nach Osten und die y-Achse von Süden nach Norden.
Die z-Koordinate entspricht der Höhe (alle Einheiten in km). Die 3,5 km lange Startbahn beginnt im Koordinatenursprung und verläuft in Nord-Ost-Richtung, die Spitze eines Sendemastes befindet sich im Punkt $S(-1\,|-1\,|\,0{,}02)$.
Die bei den nachfolgenden Flugzeugen betrachteten Abschnitte von Flugbahnen werden als Geraden modelliert. Ein Flugzeug 1 fliegt in der Startphase von $A(6\,|\,6\,|\,1)$ nach $B(18\,|\,18\,|\,2)$, ein Flugzeug 2 befindet sich im Landeanflug von Punkt $C(-20\,|-22\,|\,6)$ in Richtung zum Punkt $D(-8\,|-10\,|\,5)$

2.1 Berechnen Sie den Steigungswinkel von Flugzeug 1 auf dem Weg von A nach B.

2.2 Zum selben Zeitpunkt, in dem sich das Flugzeug 1 im Punkt A befindet, passiert Flugzeug 2 den Punkt C.
Untersuchen Sie, nach welcher Zeit beide Flugzeuge die gleiche Flughöhe haben, wenn man voraussetzt, dass sich beide mit einer konstanten Geschwindigkeit von 250 km/h bewegen.

2.3 Bestimmen Sie die kürzeste Entfernung des zweiten Flugzeuges zur Spitze des Sendemastes.

2.4 Begründen Sie, dass der Punkt $E(2\,|\,2\,|\,0)$ auf der Startbahn liegt.

Gäste auf der Besucherterrasse des Flughafengebäudes haben den Start von Flugzeug 1 beobachtet. Es war deutlich zu erkennen, dass das Flugzeug vom Abheben von der Startbahn bis zum Punkt A deutlich steiler aufgestiegen ist als später von A nach B.

Ein Gast behauptet: Das waren ja mindestens 30 Grad". Überprüfen Sie diese Behauptung.

Später hat sich ein drittes Flugzeug von dieser Startbahn vom Startpunkt E aus mit einem konstantem Steigungswinkel von 10,5° zum Punkt A bewegt.
Bestimmen Sie die Koordinaten von E.

2.5 Die Besucherterrasse wird von einem Sonnensegel in Dreiecksform beschattet. Bei leerer Terrasse fällt der Schatten des Segels vollständig auf den Terrassenboden. Der Boden liegt in der Ebene T mit der Gleichung: $z-0{,}01=0$. Die Eckpunkte des Sonnensegels befinden sich in den Punkten $U(0{,}5\,|\,0{,}005\,|\,0{,}015)$, $V(0{,}49\,|\,0\,|\,0{,}012)$, $W(0{,}51\,|\,0\,|\,0{,}012)$.

Die Sonnenstrahlen verlaufen in Richtung $\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}$

Berechnen Sie die Größe der Fläche des Sonnensegels in m^2
Vergleichen Sie diese Größe mit der Größe des Schattens des Sonnensegels.

LÖSUNGEN

Lösung: A1 Analysis

Gegeben sind die Funktionen f und g mit ihren Gleichungen

$$f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1 \quad \text{und} \quad g(x) = -\frac{9}{1280}x^4 + \frac{9}{40}x^2 - \frac{9}{5} \quad \text{mit} \quad x \in \mathbb{R}.$$

1.1 Berechnen Sie für den Graphen von f die Koordinaten der-Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sowie der Extrempunkte und bestimmen Sie die Art der Extrema. Zeichnen Sie diesen Graphen im Intervall $-2 \le x \le 2$ in ein geeignetes Koordinatensystem.

Schnittpunkte von K_f mit der x-Achse: y = 0, d. h. $f(x) = 0 \iff -x^4 + 2x^2 + 1 = 0$

Diese biquadratische Gleichung löst man z. B. mit der <u>Substitution</u> $u = x^2$.

Dann entsteht: $-u^2 + 2u + 1 = 0 \Rightarrow u_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{-2} = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{-2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{-2} = 1 \pm \sqrt{2}$

<u>Rücksubstitution:</u> $u_1 = 1 + \sqrt{2} = x^2 \Rightarrow x_{1,2-1} = \pm\sqrt{\sqrt{2}+1} \approx \pm 1{,}55$

$u_2 = 1 - \sqrt{2} < 0$ Damit wäre $x^2 < 0$, was zu keiner Lösung führt.

Ergebnis: $N_{1,2}\left(\pm\sqrt{\sqrt{2}+1} \mid 0\right) \approx (\pm 1{,}55 \mid 0)$

Schnittpunkte von K_f mit der y-Achse: $x = 0 \Rightarrow y = f(0) = 1$

Ergebnis: $S_y(0 \mid 1)$

Ableitungen: $f'(x) = -4x^3 + 4x$; $f''(x) = -12x^2 + 4$

Extrema:

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0 \iff -4x^3 + 4x = 0 \iff 4x(-x^2 + 1) = 0$

1. Faktor = 0: $x_{E1} = 0$

2. Faktor = 0: $x^2 = 1 \iff x_{E2,3} = \pm 1$

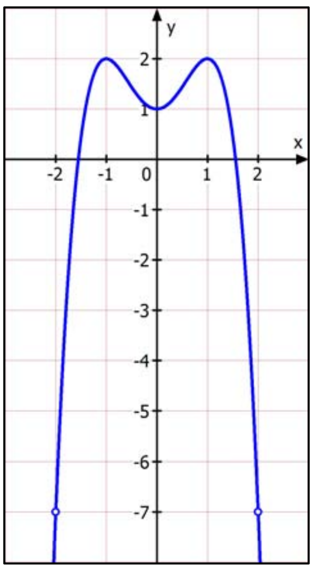
Hinreichende Bedingung: $f''(0) = 4 > 0 \Rightarrow$ Minimum

$f''(\pm 1) = -12 + 4 < 0 \Rightarrow$ Maxima

y-Koordinaten: $f(0) = 1$

$f(\pm 1) = -1 + 2 + 1 = 2$

Ergebnis: $T(0 \mid 1)$, $H_{1,2}(\pm 1 \mid 2)$.



1.2 Die Gerade mit der Gleichung y = 1,5 schließt mit dem Graphen von f mehrere Flächen vollständig ein. Bestimmen Sie den Gesamtinhalt dieser Flächen.

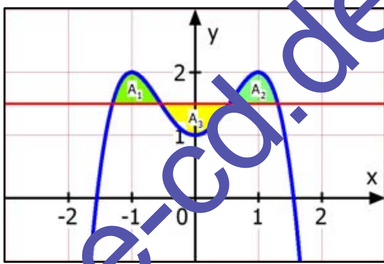
Schnittstellen von K_f und der Geraden:

$$-x^4+2x^2+1=1{,}5 \quad\Leftrightarrow\quad -x^4+2x^2-0{,}5=0 \quad\Leftrightarrow\quad x^4-2x^2+\tfrac{1}{2}=0$$

Substitution: $u=x^2$: $\quad u^2-2u+\tfrac{1}{2}=0 \qquad u_{1,2}=\dfrac{2\pm\sqrt{4-4\cdot1\cdot\frac{1}{2}}}{2}=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2}=1\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$

Rücksubstitution: $x^2=1+\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \;\Rightarrow\; x_{S1,2}=\pm\sqrt{1+\tfrac{1}{2}\sqrt{2}}\approx\pm1{,}307$

$x^2=1-\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \;\Rightarrow\; x_{S3,4}=\pm\sqrt{1-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}}\approx\pm0{,}541$



Da f (wegen der geraden Exponenten) symmetrisch zur y-Achse ist, sind A_1 und A_2 gleich groß:

$$A_1+A_2=2\cdot\int_{0{,}541}^{1{,}307}\left(f(x)-1{,}5\right)dx\approx0{,}493$$

$$A_3=2\cdot\int_0^{0{,}541}\left(1{,}5-f(x)\right)dx=-2\cdot\int_0^{0{,}541}\left(f(x)-1{,}5\right)dx$$

$$=2\cdot\int_{0{,}541}^{0}\left(f(x)-1{,}5\right)dx\approx0{,}348$$

Gesamtfläche: $\qquad A=A_1+A_2+A_3\approx0{,}841$

Da es sich um Aufgaben mit CAS handelt, wird diese Rechnung auch entsprechend ausgeführt. Hier mit CASIO ClassPad. (hier die PC-Version)

```
Edit Aktion Interaktiv
Solve(x^4-2*x^2+1/2=0,x)
        {x=-0.541,x=0.541,x=-1.307,x=1.307}
2∫[0.541,1.307](-x^4+2x^2-0.5)dx
                                     0.493
2∫[0.541,0](-x^4+2x^2-0.5)dx
                                     0.348
0.348+0.493
                                     0.841
```

1.3 Weisen Sie nach, dass sich die Graphen von f und g nie unter einem rechten Winkel schneiden.

Der Schnittwinkel von Kurven wird immer an den Tangenten im Schnittpunkt gemessen. Dazu benötigt man die Schnittstellen und darin die Tangentensteigungen:

Bei orthogonalem Schnitt gilt:

$f'(x_S)\cdot g'(x_S)=-1 \qquad (*)$

1. Lösungsmöglichkeit:

Schnittstellen $\pm1{,}672$ berechnen und dann (*) kontrollieren. Ergebnis: $f'(x_S)\cdot g'(x_S)\neq-1$

2. Lösungsmöglichkeit:

Man überprüft, an welchen Stellen die

```
Define f(x)=-x^4+2x^2+1
                                      done
Define f1(x)=d/dx(f(x))
                                      done
Define g(x)=-9/1280 x^4+9/40 x^2-9/5
                                      done
Define g1(x)=d/dx(g(x))
                                      done
Solve(f(x)=g(x),x)
                       {x=-1.672,x=1.672}
f1(1.672)*g1(1.672)
                                    -7.457
Solve(f1(x)*g1(x)=-1,x)
         {x=-3.995,x=-1.195,x=1.195,x=3.995}
```

Tangenten orthogonal sind, indem man die Gleichung $f'(x)\cdot g'(x)=-1$ lösen lässt.

Man erhält 4 Stellen. Das diese aber nicht mit den Schnittstellen übereinstimmen, liegt an diesen kein orthogonaler Schnitt vor.

1.4 In der Praxis werden Flüssigkeiten in oben offenen Auffangbecken gespeichert, deren Boden gewölbt ist und deren ebene Stirnflächen senkrecht nach unten verlaufen.
Die mit A, B, C und D bezeichneten Eckpunkte des Beckens bilden ein Rechteck mit AB = 5 m.

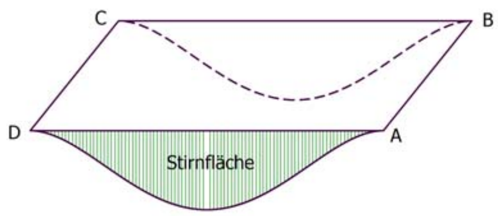


Abbildung 1

Ein solches Becken hat überall denselben Querschnitt.
Im Modell wird dieser Querschnitt unten durch eine Parabel und oben durch eine Gerade begrenzt (siehe Abbildung 1). Im Koordinatensystem liegen die Gerade auf der x-Achse und die Parabel symmetrisch zur y-Achse.
Die Parabel wird durch den Graphen der Funktion g im Intervall $-4 \le x \le 4$ erfasst.
Eine Längeneinheit entspricht dabei einem Meter.

1.4.1 Aus Sicherheitsgründen dürfen die Wände ungesicherter Auffangbecken nirgends steiler als 30° sein. Andernfalls müssen sie umzäunt werden.
Überprüfen Sie, ob die Errichtung eines Zauns für dieses Auffangbecken auch entlang der Seiten AB und CD erforderlich ist.

WISSEN: Die maximale Steigung liegt stets in einem Wendepunkt vor.

Berechnung der Wendestelle von g.

Gegeben: $g(x) = -\frac{9}{1280}x^4 + \frac{9}{40}x^2 - \frac{9}{5}$

Ableitungen: $g'(x) = -\frac{9}{320}x^3 + \frac{9}{20}x$, $\quad g''(x) = -\frac{27}{320}x^2 + \frac{9}{20}$, $\quad g'''(x) = -\frac{27}{160}x$

Wendepunkt: $g''(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{27}{320}x^2 + \frac{9}{20} = 0 \quad | \cdot\left(-\frac{320}{27}\right)$

$$x^2 - \frac{9}{20}\cdot\frac{320}{27} = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{16}{3} = 0 \Leftrightarrow x_{W1,2} = \pm\sqrt{\frac{16}{3}} = \pm\frac{4}{\sqrt{3}} = \pm\frac{4}{3}\sqrt{3} \approx \pm 2{,}31$$

Kontrolle: $g'''(2{,}31) < 0 \Rightarrow$ Maximale Steigung $\quad g'(2{,}31) = 0{,}69 = 69\% > 30\%$

$g'''(-2{,}31) > 0 \Rightarrow$ Minimale Steigung = maximales Gefälle.
$g'(-2{,}31) = -0{,}69 = -69\%$, das ist auch steiler als 30%.

Ergebnis Man benötigt einen Zaun.

CAS:

Define $g2(x)=\frac{d^2}{dx^2}(g(x))$ → done	g3(2.309) → −0.390
Define $g3(x)=\frac{d^3}{dx^3}(g(x))$ → done	g3(−2.309) → 0.390
Solve(g2(x)=0 → {x=−2.309, x=2.309}	g1(2.309) → 0.693
	g1(−2.309) → −0.693

1.4.2 Gegen Witterungseinflüsse wird dieses Becken mit einer an den Stirnseiten offenen Kunststoffhaube geschützt (siehe Abbildung 2). Ihr Querschnitt wird durch den Graphen der Funktion $q(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 2$ im Intervall $-4 \le x \le 4$ modelliert $(x \in \mathbb{R})$. Bestimmen Sie die Größe der Fläche der Abdeckung.

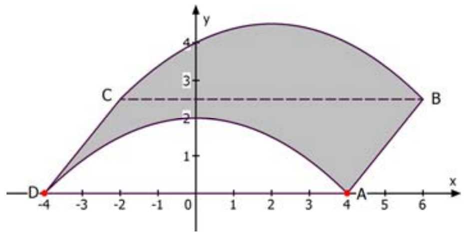


Abbildung 2

Die Oberfläche ist ein gebogenes Rechteck. Die Länge ist die **Länge des Parabelbogens:**

$$L = 2\int_0^4 \sqrt{1+(q'(x))^2}\,dx = 2\int_0^4 \sqrt{1+\left(-\tfrac{1}{4}x\right)^2}\,dx = 2\int_0^4 \sqrt{1+\tfrac{1}{16}x^2}\,dx$$

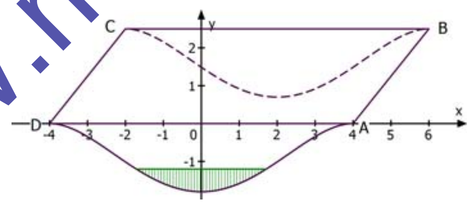
```
2∫_0^4 √(1+1/16 x^2) dx
                                9.182
ans*5
                               45.912
```

Die Breite ist mit $AB = 5\text{ m}$ angegeben.

Ergebnis: Die Fläche beträgt etwa 45,91 m^2.

1.4.3 Das Auffangbecken ist bis zu einem Drittel seiner Höhe gefüllt. Ermitteln Sie, wie viel Liter Flüssigkeit noch in dieses Becken fließen können, sodass es randvoll gefüllt ist.

Querschnittsfläche:



$$Q = 2\cdot\int_0^4 (-g(x))\,dx = 7{,}69\text{ m}^2$$

Volumen: $V = Q\cdot\overline{AB} = 7{,}69\cdot 5\text{ m}^3 \approx 38{,}400\text{ m}^3$

Aus $g(0) = -\frac{9}{5} = -1{,}8$ folgt, dass der tiefste Punkt bei y = -1,8 liegt.

Also ist die maximale Tiefe 1,8 m. Ein Drittel davon sind 0,6 m. Der Füllstand liegt dann bei y = -1,2.

Schnittstelle mit der Kurve K_g: CAS:

$$g(x) = -1{,}2 \quad\Rightarrow\quad x_{1,2} = \pm 1{,}713$$

```
Solve(g(x)=-1.2,x)
          {x=-1.713,x=1.713,x=-5.391,x=5.391}
2∫_0^1.713 (-1.2-g(x))dx
                                        1.343
ans*5
                                        6.715
```

Neue Querschnittsfläche zwischen der oberen Linie y = - 1,2 und der unteren Begrenzung y = g(x):

$$Q = 2\cdot\int_0^{1{,}713} (-1{,}2 - g(x))\,dx = 1{,}343$$

Die Breite ist mit $AB = 5\text{ m}$ angegeben.

Gefülltes Volumen:

$$V_1 = Q\cdot 5\text{ m} \approx 6{,}715\text{ m}^3$$

Noch leeres Volumen:

$$\Delta V = V - V_1 = 38{,}4 - 6{,}715 = 31{,}685\ \left(\text{m}^3\right) \approx 31700\text{ Liter}$$

Lösung: A2 Analytische Geometrie

Gegeben sind in einem kartesischen Koordinatensystem die Punkte $A(5\,|\,-2\,|\,-2)$, $B(3\,|\,4\,|\,-1)$ und $C(-3\,|\,1\,|\,1)$.

2.1 Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E, in der die Punkte A, B und C liegen.

Ich zeige drei verschiedene Lösungsverfahren:

1. Methode: Aufstellen der Parametergleichung, die dann umgewandelt wird.

E: $\vec{x} = \vec{a} + r\cdot\overrightarrow{AB} + s\cdot\overrightarrow{AC}$ d. h. $\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\-2\\-2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\6\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-8\\3\\3\end{pmatrix}$

Äquivalentes Gleichungssystem:
$$\left\{\begin{matrix} x = 5-2r-8s \\ y = -2+6r+3s \\ z = -2+r+3s \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix}$$

Elimination von s durch (2) - (3): $y - z = 5r \;\Rightarrow\; r = \frac{1}{5}(y-z) = \frac{1}{5}y - \frac{1}{5}z$

Berechnung von s durch Einsetzen in (3): $z = -2 + \frac{1}{5}y - \frac{1}{5}z + 3s$

$3s = \frac{6}{5}z - \frac{1}{5}y + 2 \;\Rightarrow\; s = -\frac{1}{15}y + \frac{6}{15}z + \frac{2}{3}$

r und s in (1) ersetzen: $x = 5 - 2\left(\frac{1}{5}y - \frac{1}{5}z\right) - 8\left(-\frac{1}{15}y + \frac{6}{15}z + \frac{2}{3}\right)$

$x = 5 - \frac{2}{5}y + \frac{2}{5}z + \frac{8}{15}y - \frac{48}{15}z - \frac{16}{3} \quad | \cdot 15$

$15x = 75 - 6y + 6z + 8y - 48z - 80$

Ergebnis: E: $15x - 2y + 42z = -5$

Man kann dieses Verfahren genau so mit einem CAS durchführen, also aus (2) und (3) r und s berechnen und dieses dann in (1) einsetzen und dann vereinfachen.

```
{y=-2+6r+3s
{z=-2+r+3s |r,s
                  {r=(y-z)/5, s=-(y-6·z-10)/15}
simplify(x=5-2r-8s|ans
                  x=(2·y-42·z-5)/15
15*ans
                  15·x=2·y-42·z-5
```

2. Methode: Berechnung des Normalenvektors mit dem Skalarprodukt.

Die Normalenvektoren $\vec{n} = \begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}$ der Ebene E sind zu den Vektoren $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-2\\6\\1\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-8\\3\\3\end{pmatrix}$ orthogonal. Also gilt:

$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n} = 0 \;\Leftrightarrow\; -2n_1 + 6n_2 + n_3 = 0 \quad (1)$

$\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n} = 0 \;\Leftrightarrow\; -8n_1 + 3n_2 + 3n_3 = 0 \quad (2)$

Elimination von n_3 durch $(2) - 3\cdot(1)$: $-2n_1 - 15n_2 = 0 \;\Rightarrow\; n_1 = -\frac{15}{2}n_2$

Bei 2 Gleichungen mit 3 Unbekannten kann mein eine frei wählen, z. B. $n_2 = 2$:

Das ergibt $n_1 = -15$. Aus (1) folgt dann $n_3 = 2n_1 - 6n_2 = -30 - 12 = -42$

Der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix}-15\\2\\-42\end{pmatrix}$ ist also ein Normalenvektor von E: $-15x + 2y - 42z = k$

Punktprobe mit $A(5\,|\,-2\,|\,-2)$ ergibt: $k = -75 - 4 + 84 = 5$

Ergebnis: E: $-15x + 2y - 42z = 5$

Mit einem CAS kann man diese Methode so durchführen: Man berechnet manuell das Gleichungssystem und löst es dann so. Um die Brüche zu beseitigen setze ich dann r = 42 ein.

$$\begin{cases} -2a+6b+c=0 \\ -8a+3b+3c=0 \\ c=r \end{cases} \Big| a,b,c \qquad \left\{a=\frac{5\cdot r}{14},\ b=\frac{-r}{21},\ c=r\right\}$$

$$\text{ans}\,|\,r=42 \qquad \{a=15,\ b=-2,\ c=42\}$$

Man kann aber auch diese beiden Gleichungen damit aufstellen und sie dann wie zuvor gezeigt lösen lassen.

$$\text{dotP}\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}\right)=0 \qquad -2\cdot a+6\cdot b+c=0$$

$$\text{dotP}\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -8 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}\right)=0 \qquad -8\cdot a+3\cdot b+3\cdot c=0$$

Die Ebenengleichung lautet als Normelanform so: $\vec{n}\cdot\vec{x}=k$
k bestimmt man durch die Punktprobe, z. B. mit A.
Setzte man also A ein, folgt: $k=\vec{n}\cdot\vec{a}$,
Damit lautet die Ebenengleichung allgemein so: $\vec{n}\cdot\vec{x}=\vec{n}\cdot\vec{a}$.

$$\text{dotP}\left(\begin{bmatrix} 15 \\ -2 \\ 42 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)=\text{dotP}\left(\begin{bmatrix} 15 \\ -2 \\ 42 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}\right) \qquad 15\cdot x-2\cdot y+42\cdot z=-5$$

Genau dies habe ich rechts im 3. Screenshot eingegeben und erhalte die Ebenengleichung.

3. Methode: Berechnung des Normalenvektors mit dem Vektorprodukt.

WISSEN: Das Vektorprodukt $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ergibt einen Vektor, der auf $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ senkrecht steht, also ein Normalenvektor von E ist.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 18-3 \\ -8+6 \\ -6+48 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15 \\ -2 \\ 42 \end{pmatrix}$$

Kreuz-Schema:

$$\begin{array}{cc} \cancel{-2} & \cancel{-8} \\ 6 & 3 \\ 1 & 3 \\ -2 & -8 \\ 6 & 3 \\ \cancel{1} & \cancel{3} \end{array}$$

Der Vektor $\vec{n}=\begin{pmatrix} 15 \\ -2 \\ 42 \end{pmatrix}$ ist also ein Normalenvektor von

E: $15x-2y+42z=k$. Punktprobe mit $A(5\,|\,-2\,|\,-2)$ ergibt: $k=75+4-84=-5$

Ergebnis: E: $15x-2y+42z=-5$

Mit CAS berechnet man genauso den Normalenvektor über das „Kreuzprodukt“ und speichert das Ergebnis als Vektor n ab.

Dann ist die Erstellung der Ebenengleichung in der Form $\vec{n}\cdot\vec{x}=\vec{n}\cdot\vec{a}$ (s. oben) nur noch eine Zeile.

$$\text{crossP}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -8 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}\right)\rightarrow n \qquad \begin{bmatrix} 15 \\ -2 \\ 42 \end{bmatrix}$$

$$\text{dotP}\left(n, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)=\text{dotP}\left(n, \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}\right) \qquad 15\cdot x-2\cdot y+42\cdot z=-5$$

Hinweis: *Diese dritte Methode ist die effektivste.*
Sie ist mit dem wenigsten Aufwand erledigt.

Berechnen Sie die Koordinaten des Durchstoßpunktes der z-Achse durch E.

Alle Punkte auf der z-Achse haben x = y = 0. Setzt man dies in die Gleichung von E ein,

erhält man: $15\cdot\boxed{0}-2\cdot\boxed{0}+42z=-5 \quad\Rightarrow\quad z=-\frac{5}{42}$

Ergebnis: $S_z\left(0\,|\,0\,|\,\frac{5}{42}\right)$

Weisen Sie nach, dass der Punkt D mit den Koordinaten $D(2\,|\,-3{,}5\,|\,-1)$ in E liegt.

Diese *kindische* Aufgabe wird durch eine Punktprobe erledigt:

$$15\cdot\boxed{2}-2\cdot\boxed{-3{,}5}+42\cdot\boxed{-1}=30+7-42=-5$$

2.2 Die Punkte A, B, C und D bilden die Grundfläche einer Pyramide ABCDS mit der Spitze $S(3\,|\,-6\,|\,7)$.

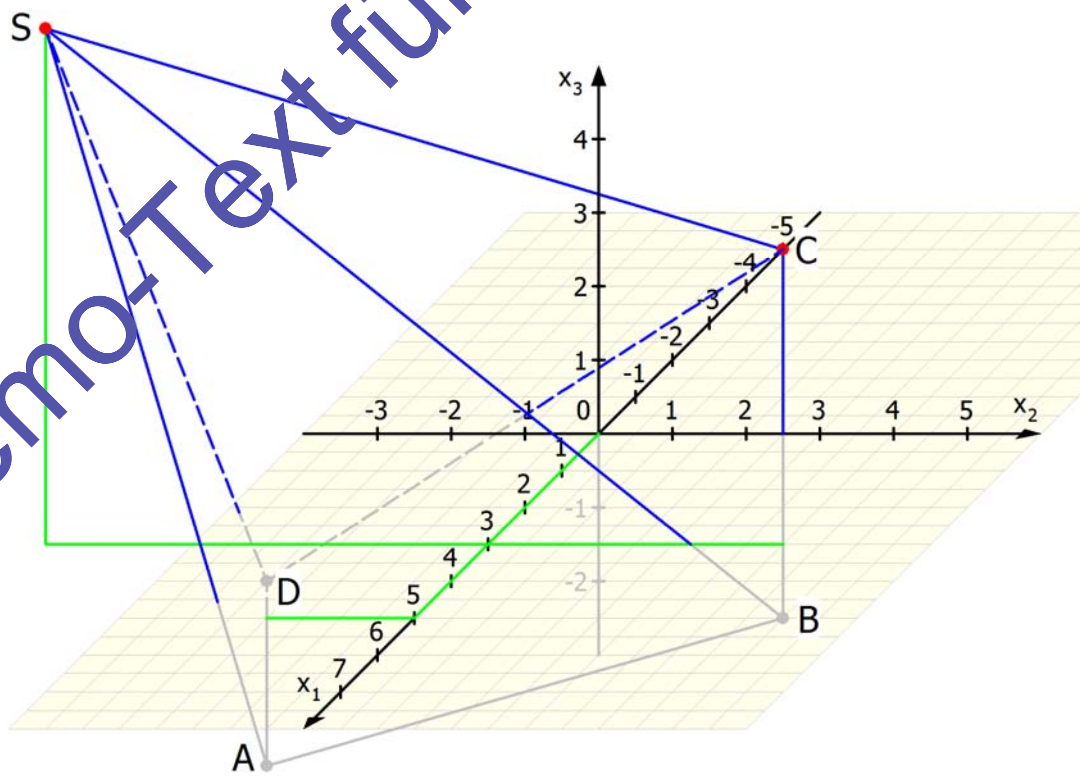
2.2.1 Untersuchen Sie, ob ABCD ein Parallelogramm ist.

Ein Viereck ist ein Parallelogramm, wenn zwei Gegenseiten parallel und gleich lang sind.
Vektoriell bedeutet das, dass $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ gelten muss: (oder $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$)

$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-2\\6\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DC}=\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\-3{,}5\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\4{,}5\\2\end{pmatrix}$. Diese Vektoren sind jedoch nicht gleich.

Also ist ABCD kein Parallelogramm.

2.2.2 Stellen Sie die Pyramide grafisch dar. *(Hier mit MatheGrafix)*



2.2.3 Bestimmen Sie rechnerisch die Höhe h der Pyramide

Die Pyramidenhöhe ist der Abstand des Punktes $S(3\,|\,-6\,|\,7)$ von der Ebene E.

Diesen berechnet man **entweder mit der Hesseschen Normalform:**

E: $-15x+2y-42z=5 \quad | \quad |\vec{n}|=\sqrt{15^2+2^2+42^2}=\sqrt{1993}$

HNF: $\dfrac{-15x+2y-42z-5}{\sqrt{1993}}=0$

Abstand: $h=d(S,E)=\dfrac{\left|-15\cdot\boxed{3}+2\cdot\boxed{-6}-42\cdot\boxed{7}-5\right|}{\sqrt{1993}}\approx 7{,}97 \ \ (LE)$

Man kann dies mit einem CAS in nur zwei Zeilen darstellen.

In der obersten Screenshot-Zeile steht die Normalengleichung von E.

In der zweiten Zeile steht die HNF, in die S eingesetzt worden ist.

$\text{dotP}\left(n,\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)=\text{dotP}\left(n,\begin{bmatrix}5\\-2\\-2\end{bmatrix}\right)$

$15\cdot x-2\cdot y+42\cdot z=-5$

$\dfrac{\text{abs}\left(\text{dotP}\left(n,\begin{bmatrix}3\\-6\\7\end{bmatrix}\right)-\text{dotP}\left(n,\begin{bmatrix}5\\-2\\-2\end{bmatrix}\right)\right)}{\text{norm}(n)}$

7.974

… **oder mit dem Lot L von S auf E**: L: $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-6\\7\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-15\\2\\-42\end{pmatrix}$

Schnitt von L mit E: $-15\cdot\boxed{3-15t}+2\cdot\boxed{-6+2t}-42\cdot\boxed{7-42t}=5$

Daraus folgt $t=-\dfrac{356}{1993}$

Und damit erhält man den Lotfußpunkt $F(5{,}679\,|\,-6{,}357\,|\,14{,}502)$.

Die Höhe ist dann der Betrag des Vektors $\overrightarrow{SF}$:

$$h=\left|\overrightarrow{SF}\right|=\left|\begin{pmatrix}5{,}679\\-6{,}357\\14{,}502\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\-6\\7\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}2{,}679\\-0{,}357\\7{,}502\end{pmatrix}\right|=\sqrt{2{,}679^2+0{,}357^2+7{,}502^2}\approx 7{,}97 \ \ (LE)$$

Die CAS-Rechnung mit CASIO ClassPad ist trickreich

Zuerst die Normalengleichung von E.

Dann wird die Lotgerade als Vektorfunktion definiert.

Jetzt die Schnittgleichung von Lot und Ebene

mit der Lösung t = …

Dann wird der Lotfußpunkt berechnet:

$F(5{,}679\,|\,-6{,}357\,|\,14{,}502)$

Zum Schluss $h=\left|\overrightarrow{SF}\right|\approx 7{,}97 \ \ (LE)$

$\text{dotP}\left(n,\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)=\text{dotP}\left(n,\begin{bmatrix}5\\-2\\-2\end{bmatrix}\right)$

$15\cdot x-2\cdot y+42\cdot z=-5$

$\text{Define lot}(t)=\begin{bmatrix}3+15t\\-6-2t\\7+42t\end{bmatrix}$

done

$\text{solve}\left(\text{dotP}(n,\text{lot}(t))=\text{dotP}\left(n,\begin{bmatrix}5\\-2\\-2\end{bmatrix}\right),t\right)$

$\left\{t=-\dfrac{356}{1993}\right\}$

$\text{lot}\left(\dfrac{356}{1993}\right)$

$\begin{bmatrix}5.679\\-6.357\\14.502\end{bmatrix}$

$\text{norm}\left(\text{ans}-\begin{bmatrix}3\\-6\\7\end{bmatrix}\right)$

7.974

Das beherrschen Schüler selten. Und dann macht CAS auch wieder Spaß.
Dennoch: Die Abstandberechnung mit der HNF ist optimal!

… und die Größe des Winkels, der von den Seitenkanten AS und BS eingeschlossen wird.

$$\cos(\gamma) = \cos\left(\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{BS}\right) = \frac{\left|\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{BS}\right|}{\left|\overrightarrow{AS}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BS}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}-2\\-4\\9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-10\\8\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{4+16+81}\cdot\sqrt{100+64}} = \frac{112}{\sqrt{101}\cdot\sqrt{164}}$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{121}{\sqrt{101}\cdot\sqrt{181}}\right) \approx 29{,}51^{\circ}$$

Der Rechner CASIO ClassPad hat eine eigene Winkelfunktion „angle", die alles vereinfacht.

$$\text{angle}\left(\begin{bmatrix}-2\\-4\\9\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-10\\8\end{bmatrix}\right)$$

29.514

2.2.4 Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.

Hier bereitet das unregelmäßige Viereck Probleme. Man muss die Grundfläche nämlich als Summe zweier Dreiecksflächen berechnen.

Für Dreiecksflächen verwendet man am besten das Vektorprodukt:

z. B. so: $$G = \tfrac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right| + \tfrac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{CD}\times\overrightarrow{CB}\right| = \tfrac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}-2\\6\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-3\\-1{,}5\\1\end{pmatrix}\right| + \tfrac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}5\\-4{,}5\\-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}6\\3\\-2\end{pmatrix}\right| \approx 33{,}48 \text{ FE}$$

CAS-Screenshot:

$$\frac{1}{2}\text{norm}\left(\text{crossP}\left(\begin{bmatrix}-2\\6\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-3\\-1.5\\1\end{bmatrix}\right)\right) + \frac{1}{2}\text{norm}\left(\text{crossP}\left(\begin{bmatrix}5\\-4.5\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}6\\3\\-2\end{bmatrix}\right)\right)$$

33.482

2.3 Gegeben sind jetzt weiter hin die Punkte $P_k(-3\,|\,1\,|\,k)$ mit $k \in \mathbb{R}$.

2.3.1 Bestimmen Sie den Wert von k so, dass die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AP_k}$ orthogonal sind.

Bedingung: $$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_k} = \begin{pmatrix}-2\\6\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-8\\3\\k+2\end{pmatrix} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 16+18+k+2=0 \quad\Leftrightarrow\quad k=-36$$

2.3.2 Berechnen Sie für jedes der Dreiecke ABP_k den Flächeninhalt in Abhängigkeit von k. Für einen Wert von k ist dieser Flächeninhalt minimal. Berechnen Sie für diesen Wert den Flächeninhalt.

Inhaltsfunktion für das Dreieck ABP_k:

$$\begin{array}{cc} -2 & -8 \\ 6 & 3 \\ 1 & k+2 \\ -2 & -8 \\ 6 & 3 \\ 1 & k+2 \end{array}$$

$$A_\triangle(k) = \tfrac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AP_k}\right| = \tfrac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}-2\\6\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-8\\3\\k+2\end{pmatrix}\right| = \tfrac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}6(k+2)-3\\-8+2(k+2)\\-6+48\end{pmatrix}\right| = \tfrac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}6k+9\\2k-4\\42\end{pmatrix}\right|$$

$$A_\triangle(k) = \tfrac{1}{2}\sqrt{36k^2+108k+81+4k^2-16k+16+42+1764} = \tfrac{1}{2}\sqrt{40k^2+92k+1861}$$

Diese Funktion wird minimal, wenn der Radikand minimal wird.

Daher definiert man diese Hilfsfunktion $r(k) = 40k^2+92k+1861$

Ableitungen: $r'(k) = 80k + 92\,,\quad r''(k) = 80$

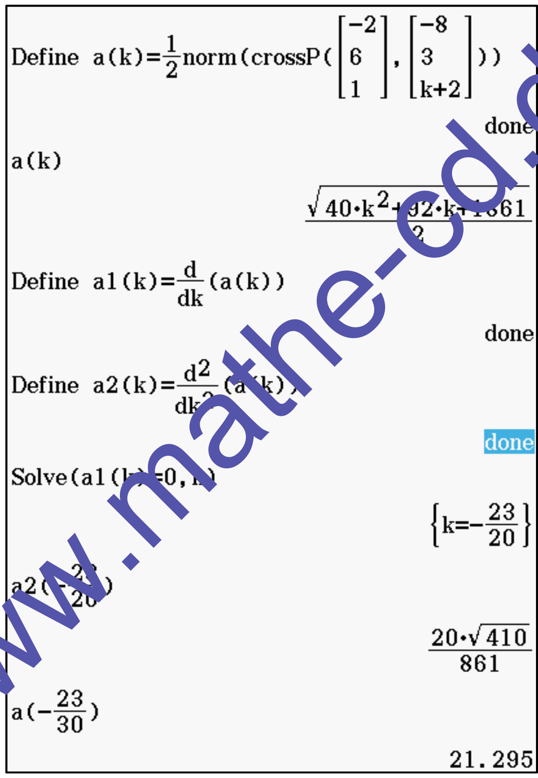
Notwendige Bedingung: $r'(k)0 \;\Leftrightarrow\; 80k = -92 \;\Leftrightarrow\; k = -\dfrac{92}{80} = -\dfrac{23}{20}$

Hinreichende Bedingung: Da $r''\left(-\tfrac{23}{30}\right) > 0$, liegt ein Minimum vor.

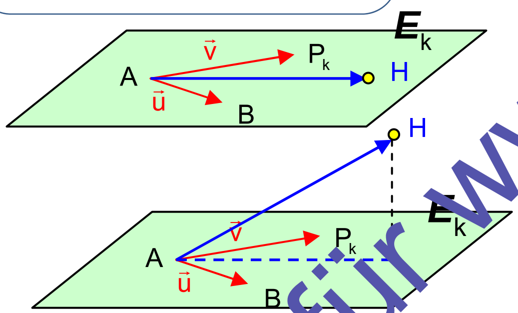
Minimaler Inhalt: $A_\Delta\left(\tfrac{23}{30}\right) \approx 21{,}34 \;\;(FE)$

CAS:

Die Abläufe entsprechen nicht der manuellen Rechnung, denn hier habe ich direkt das Minimum der Inhaltsfunktion bestimmt, ohne die Vereinfachung über die Radikandfunktion zu verwenden.



2.3.3 Bestimmen Sie alle Werte von k, für die folgende Aussage gilt: Der Punkt $H(1\,|\,4\,|\,5)$ liegt in der jeweiligen Ebene ABP_k.



ABP_k liegen genau dann in einer Ebene, wenn die Vektoren $\vec{AB}$, $\vec{AP_k}$ und $\vec{AH}$ komplanar sind.

1. Methode: $\vec{AB}$, $\vec{AP_k}$ und $\vec{AH}$ komplanar, wenn ihre Determinante Null ist.

$$\det\left(\vec{AB}, \vec{AP_k}, \vec{AH}\right) = \left|\begin{matrix} -2 & -8 & -4 \\ 6 & 3 & 6 \\ 1 & k+2 & 7 \end{matrix}\right| \begin{matrix} -2 & -8 \\ 6 & 3 \\ 1 & k+2 \end{matrix} = \quad \text{(Manuelle Berechnung nach Sarrus)}$$

$$= -42 - 48 - 24(k+2) + 12 + 12(k+2) + 336 = -12k + 234$$

Bedingung: $-12k + 234 = 0 \;\Leftrightarrow\; k = \dfrac{234}{12} = 19{,}5$

2. Methode: $\vec{AB}$, $\vec{AP_k}$ und $\vec{AH}$ komplanar, wenn sich $\vec{AH}$ als Linearkombination durch $\vec{AB}$ und $\vec{AP_k}$ darstellen lässt.

Ansatz: $\vec{AH} = r\cdot\vec{AB} + s\cdot\vec{AP_k}$ d. h.

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = r\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ k+2 \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{matrix} -2r - 8s = -4 \\ 6r + 3s = 6 \quad |:3 \\ r + (k+2)s = 7 \end{matrix}\right\} \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{matrix} -2r - 8s = -4 \\ 2r + s = 2 \\ r + (k+2)s = 7 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

(1) + (2): $-7s = -2 \;\Leftrightarrow\; s = \tfrac{2}{7}$. In (2): $2r + \tfrac{2}{7} = 2 \;\Leftrightarrow\; 2r = \tfrac{12}{7} \;\Leftrightarrow\; r = \tfrac{6}{7}$

In (3): $\tfrac{6}{7} + (k+2)\cdot\tfrac{2}{7} = 7 \quad |\cdot 7 \;\Leftrightarrow\; 6 + 2k + 4 = 49 \;\Leftrightarrow\; 2k = 39 \;\Leftrightarrow\; k = 19{,}5$

3. Methode: Man stellt eine Gleichung von E_k auf und macht mit P_k die Punktprobe.

$$\mathbf{E_k}: \quad \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AP_k} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ k+2 \end{pmatrix}$$

Punkteprobe mit $H(1\,|\,4\,|\,5)$
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ k+2 \end{pmatrix}$$

Diese Vektorgleichung kann man z. B. so als Gleichungssystem schreiben:

$$\left\{\begin{array}{l} -2r - 8s = -4 \\ 6r + 3s = 6 \quad |:3 \\ r + (k+2)s = 7 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -2r - 8s = -4 \\ 2r + s = 2 \\ r + (k+2)s = 7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

(1) + (2): $\quad -7s = -2 \;\Leftrightarrow\; s = \frac{2}{7}$. In (2): $\quad 2r + \frac{2}{7} = 2 \;\Leftrightarrow\; 2r = \frac{12}{7} \;\Leftrightarrow\; r = \frac{6}{7}$

In (3): $\quad \frac{6}{7} + (k+2) \cdot \frac{2}{7} = 7 \quad |\cdot 7 \;\Leftrightarrow\; 6 + 2k + 4 = 49 \;\Leftrightarrow\; 2k = 39 \;\Leftrightarrow\; k = 19{,}5$

Hinweis: *Dieser Rechenweg hat einen anderen Ansatz als in der 2. Methode, führt aber dann schnell zum selben Gleichungssystem. Da man bei der 2. Methode keine Ebenengleichung aufstellen muss, ist diese etwas kürzer.*

Rechnungen mit CAS:

Man kann bei den gezeigten Methoden auch einen CAS-Rechner einsetzen.

Dieser kann einem jedoch nur die Berechnung der Determinante (Methode 1)

oder das Lösen des Gleichungssystems (Methode 2 und 3) abnehmen.

Dies kann dann so aussehen: oder so:

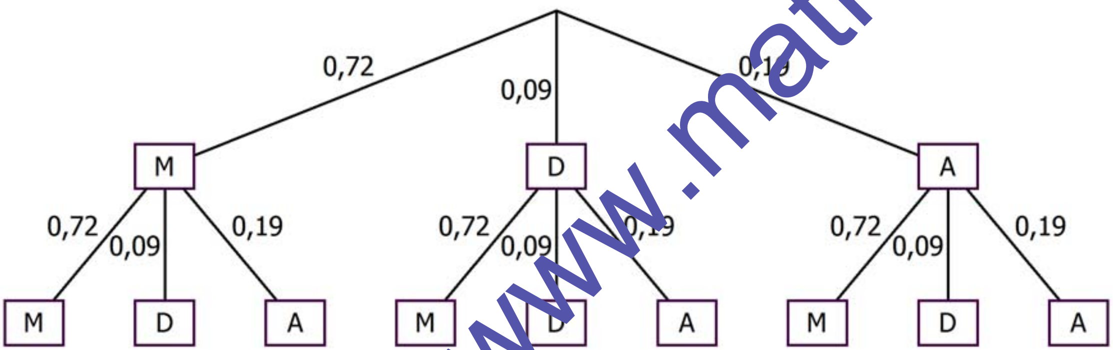
$$\det\left(\begin{bmatrix} -2 & -8 & -4 \\ 6 & 3 & 6 \\ 1 & k+2 & 7 \end{bmatrix}\right) \qquad -12\,k+234$$
$$\text{solve}(\text{ans}=0, k) \qquad \left\{k=\frac{39}{2}\right\}$$

$$\left.\begin{cases} -2r-8s=-4 \\ 6r+3s=6 \\ r+(k+2)s=7 \end{cases}\right|_{r,s,k} \qquad \left\{k=\frac{39}{2}, r=\frac{6}{7}, s=\frac{2}{7}\right\}$$

Lösung: A3 Stochastik

Die Verwaltung einer Stadt in Mecklenburg-Vorpommern gab als Veranstalter eines Volksfestes 2008 eine repräsentative Umfrage in Auftrag, die über Wirtschaftswert des Volksfestes, Besucherstruktur, Image und Unterhaltungswert Auskunft geben sollte. Die überwiegende Mehrheit der Festbesucher kam mit 72% aus M-V (M), 9% der Gäste reisten aus den übrigen deutschen Bundesländern (D) an. Die restlichen 19% der Festgäste kamen aus dem Ausland (A).

3.1 Bei der Umfrage wurden zwei Besucher nach ihrem Herkunftsort mit den Antwortmöglichkeiten M, D, A befragt.
Stellen Sie für dieses Zufallsexperiment ein vollständiges Baumdiagramm auf und geben Sie eine Ergebnismenge Ω an.



Ergebnismenge: $\Omega = \{MM,\ MD,\ MA,\ DM,\ DD,\ DA,\ AM,\ AD,\ AA\}$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

E1: Beide Besucher stammen aus Mecklenburg-Vorpommern.

$P(E_1) = P(\{MM\}) = 0{,}72^2 \approx 0{,}5184 = 51{,}84\ \%$

E2: Mindestens ein Besucher kommt aus dem Ausland.

Das Gegenereignis lautet: $\overline{E2}$: Kein Besucher kommt aus dem Ausland.

$P(\overline{E2}) = (1-0{,}19)^2 = 0{,}81^2 = 0{,}6561$

$P(E2) = 1 - 0{,}6561 = 0{,}3439 = 34{,}39\%$

Oder umständlich so:

$$P(E2) = P(\{MA,\ DA,\ AM, AD, AA\}) = 0{,}72 \cdot 0{,}19 + 0{,}09 \cdot 0{,}19 + 0{,}19 \cdot \underbrace{(0{,}72 + 0{,}09 + 0{,}19)}_{=1}$$

$$P(E2) = (0{,}72 + 0{,}09 + 1) \cdot 0{,}19 = 0{,}3439$$

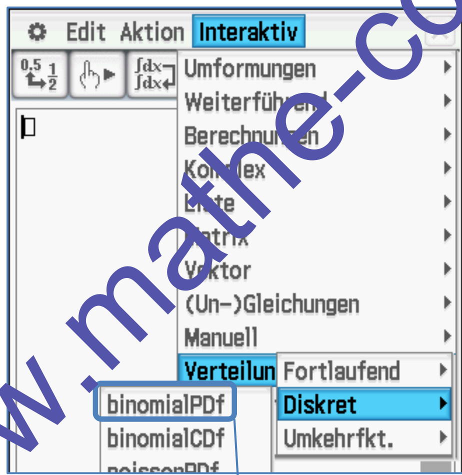
3.2 Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der ausländischen Besucher bei einer Befragung von 5 Personen.
Begründen Sie, dass X als binomialverteilt angesehen werden kann.
Berechnen Sie für jeden Wert von X die Wahrscheinlichkeit und stellen Sie diese Wahrscheinlichkeitsverteilung grafisch dar.

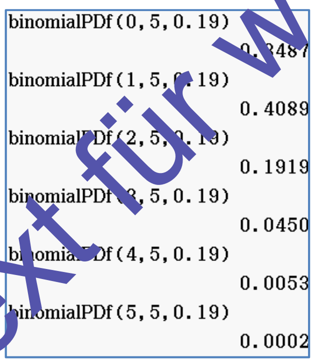
X ist binomial verteilt, da ein Besucher entweder Ausländer (p = 0,19) oder kein Ausländer (p = 0,81) ist. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist bei dieser Umfrage konstant.

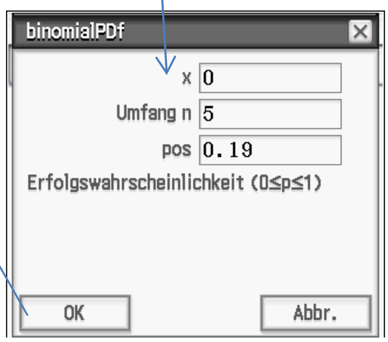
Wahrscheinlichkeitsverteilung für X:

$$P(X=0)=0{,}81^5\approx 0{,}3487$$
$$P(X=1)=\binom{5}{1}\cdot 0{,}19\cdot 0{,}81^4\approx 0{,}4049$$
$$P(X=2)=\binom{5}{2}\cdot 0{,}19^2\cdot 0{,}91^3\approx 0{,}1919$$
$$P(X=3)=\binom{5}{3}\cdot 0{,}19^3\cdot 0{,}81^2\approx 0{,}0450$$
$$P(X=4)=\binom{5}{4}\cdot 0{,}19^4\cdot 0{,}81\approx 0{,}0053$$
$$P(X=5)=0{,}19^5\approx 0{,}0002$$

CAS: Casio ClassPad





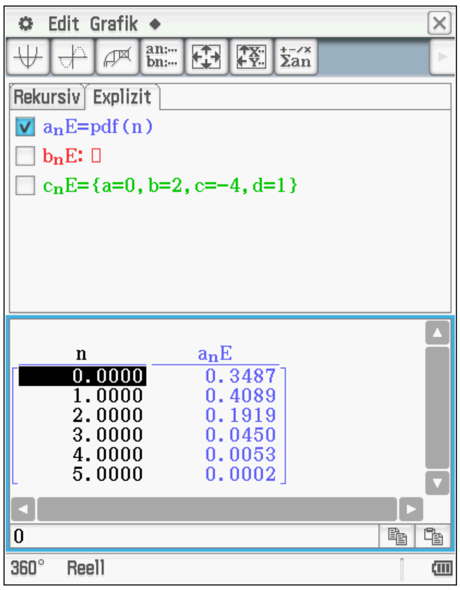


Die 2. Zeile erhält man durch Kopieren (Ziehen) der ersten Zeile mit kleiner Korrektur.

Hinweis:
Da hier eine komplette Verteilung gesucht ist, kann man auch eine Binomialfunktion definieren. Das geht z. B. einfach über das Menü „***Folgen & Reihen***":

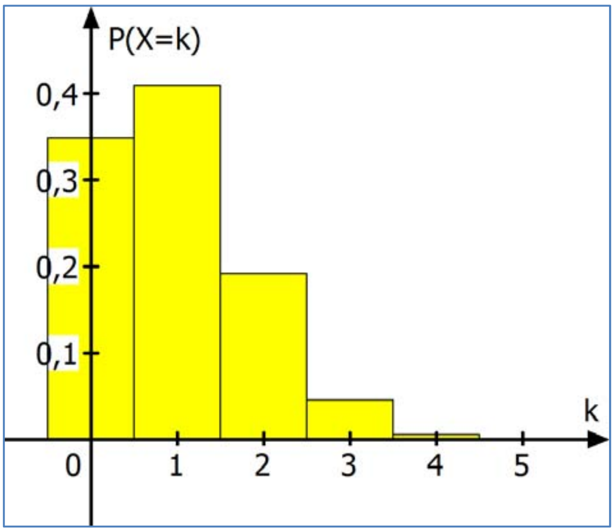
Zuerst definiert man die Funktion, die ich pdf(x) genannt habe. Dann definiere ich eine explizite Folge:
$a_n=\text{pdf}(n)$ und lasse ihre Werte für n = 0 bis 5 berechnen:

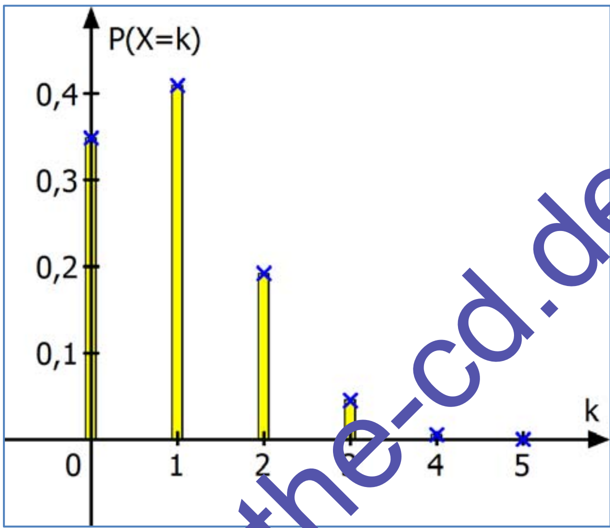
```
Define pdf(x)=binomialPDf(x,5,0.19)
                                done
```



Wahrscheinlichkeitsverteilungen kann man darstellen

als Histogramm oder als Stabdiagramm:





3.3 Vier Besucher wurden bezüglich ihrer Anfahrt befragt. Ein Großteil der Besucher benutzte öffentliche Verkehrsmittel (O), die anderen private Fahrzeuge (P).
Geben Sie die folgenden Ereignisse als Teilmengen der Ergebnismenge an.

E3: Genau drei Personen fahren mit einem privaten Fahrzeug.

$$E3 = \{OPPP, POPP, PPOP, PPPO\}$$

E4: Die dritte Person fährt mit öffentlichen Verkehrsmitteln (über die anderen ist nichts bekannt).

$$E4 = \left\{ \underbrace{OO\boxed{O}O}_{0P},\ \underbrace{OO\boxed{O}P,\ OP\boxed{O}O,\ PO\boxed{O}O}_{1P},\ \underbrace{PP\boxed{O}O,\ PO\boxed{O}P,\ OP\boxed{O}P}_{2P},\ \underbrace{PP\boxed{O}P}_{3P} \right\}$$

Hinweis: *Ich habe die 3. Stelle mit* $\boxed{O}$ *fixiert. Die anderen Stellen belege ich nach folgendem System: Zuerst kein P, dann einmal P, dann zweimal p und am Ende dreimal P.*

Formulieren Sie das Gegenereignis von E4 in Worten.

$\overline{E4}$: Die dritte Person fährt mit einem privaten Fahrzeug.

Die zugehörige Menge entsteht aus der von E4, indem man die 3. Stelle durch P ersetzt. Das sind dann auch wieder 8 Ergebnisse, zusammen sind es 16 = 2^4 *Ergebnisse*

3.4 Das Volksfest war ein Fest für alle Generationen, Jung und Alt feierten gemeinsam.
So hatte die Altersgruppe „30 Jahre und älter" einen Anteil von 53%.
Weibliche Besucher waren mit 49% vertreten.
Rund 6% aller Festbesucher waren Kinder (unter 14 Jahre).

3.4.1 Man geht bei der Befragung davon aus, dass die Eigenschaften „Geschlecht" und ,,Alter" voneinander unabhängig sind.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer Befragung die Person
E_1: männlich und „unter 30" ist.
E_2: weiblich und nicht „unter 30" ist.

Es sei u = „unter 30".

Gegeben ist also $P(\overline{u}) = 0{,}53$ und $P(w) = 0{,}49 \Rightarrow P(m) = 0{,}51$.

Gesucht ist: $P(E_1) = P(m \cap u) = P(m) \cdot P(u) = 0{,}51 \cdot 0{,}47 \approx 0{,}2397 \approx 24\%$

Hier gilt der Multiplikationssatz für das Und-Ereignis weil die Ereignisse stochastisch unabhängig sind.

$P(E_2) = P(w \cap \overline{u}) = P(w) \cdot P(\overline{u}) = 0{,}49 \cdot 0{,}53 \approx 0{,}2597 \approx 26\%$

Am Eingang einer bei allen Festbesuchern besonders beliebten Attraktion wird geprüft, wie viele der Besucher Kinder sind.

3.4.2 Es werden 120 Besucher dieser Attraktion befragt. Die Befragung kann als Bernoulli-Kette aufgefasst werden.

Mit wie vielen Kindern muss bei der Prüfung gerechnet werden?

X sei die Anzahl der Kinder.
Gegeben: $p = P(K) = 0{,}06$.
Umfang der Stichprobe: n = 120.
Erwartungswert: $E(X) = n \cdot p = 0{,}06 \cdot 120 = 7{,}2$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den 120 Befragten

E_3: genau 10 Kinder sind: $P(E_3) = P(X = 10) = \binom{120}{10} \cdot 0{,}06^{10} \cdot 0{,}94^{90} \approx 0{,}0777$

```
binomialPDf(10,120,0.06)
                  0.0777
```

E_4: mindestens 2, aber weniger als 8 Kinder gefunden werden:
$P(E_4) = P(2 \le X \le 7) \approx 0{,}7332$

```
binomialCDf(2,7,120,0.06)
                  0.5629
```

3.4.3 Berechnen Sie, wie viele Personen befragt werden müssen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 80% mindestens zwei Kinder unter den Besuchern zu finden.

Gesucht ist der Umfang n der Stichprobe.

X sei die Anzahl der Kinder. X ist binomial verteilt mit p = 0,06.

Die Wahrscheinlichkeit, mindestens 2 Kinder zu finden, berechnet man so:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$$

Dabei ist $\quad P(X = 0) = 0{,}94^n$

und $\quad P(X = 1) = \binom{n}{1} \cdot 0{,}06 \cdot 0{,}94^{n-1} = n \cdot 0{,}06 \cdot 0{,}94^{n-1}$

Also gilt: $\quad P(X \geq 2) = 1 - 0{,}94^n - n \cdot 0{,}06 \cdot 0{,}94^{n-1}$

Und es gilt die Bedingung: $\quad P(X \geq 2) > 0{,}8$

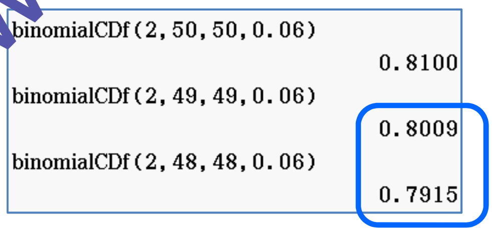
d. h. $\quad 1 - 0{,}94^n - n \cdot 0{,}06 \cdot 0{,}94^{n-1} > 0{,}8$

Es zeigt sich, dass die CAS-Rechner damit überfordert sind.

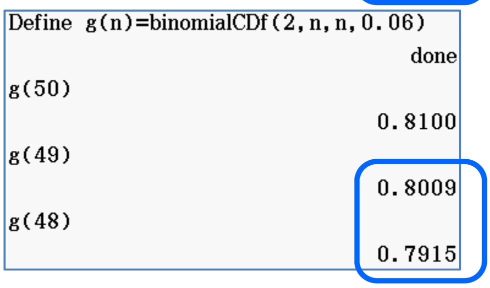
Also muss man die Ungleichung durch Probieren lösen.

3 Methoden für CASIO ClassPad:

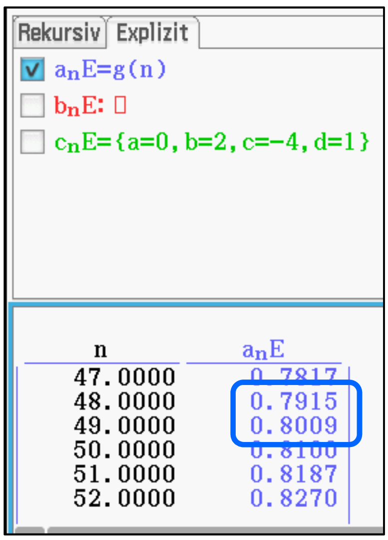
1. Berechnen einige BinomialCDf-Werte:



2. Definition einer Binomialfunktion, mit der man einige Werte berechnen lässt:



3. Definition einer Binomialfunktion, mit der man eine explizite Folge definiert und deren Wertetabelle anzeigen lässt.
(Menü Folgen & Reihen)

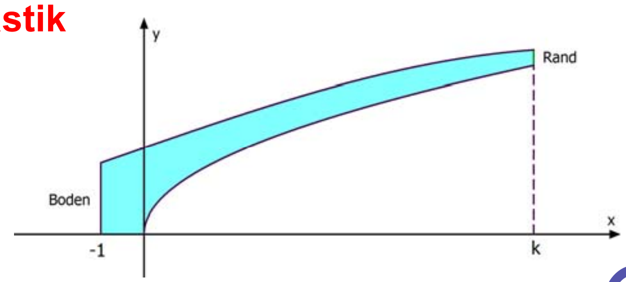


Ergebnis: Für $n \geq 49$ ist $P(X \geq 2) > 0{,}8$.

Man muss also mindestens 49 Personen befragen.

Lösung: B1 Analysis und Stochastik

In einem kartesischen Koordinatensystem wird eine Fläche durch die Graphen der Funktionen f und a, die x-Achse sowie die Geraden $x_1 = -1$ und $x_2 = k$ $(k > 0)$ begrenzt.



Es gilt $f(x) = 1{,}3\sqrt{x}$ und $a(x) = -0{,}001\,x^3 - 0{,}002\,x^2 + 0{,}35\,x + 2$ mit $k, x \in \mathbb{R}$.

Diese Fläche erzeugt bei der Rotation um die x-Achse einen Körper. Hierbei stellen im Achsenschnitt (siehe Zeichnung) der Graph von f die Innenwand und der Graph von a die Außenwand eines Glases dar. Die Geraden bilden den Boden bzw. den oberen Rand des Glases.

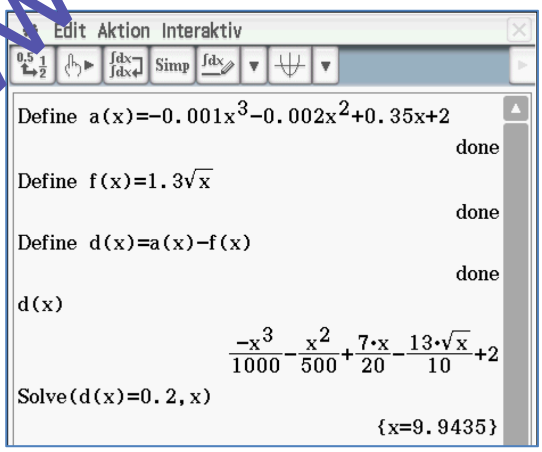
Die Dicke der Glaswand wird für x > 0 zwischen Außen- und Innenwand parallel zum Boden gemessen; die Höhe vom Boden aus. Dabei entspricht eine Einheit einem Zentimeter.

Um Isoliergläser herzustellen, wird der Raum, den die rotierende Fläche erzeugt, evakuiert.

1.1 Ermitteln Sie den Innendurchmesser des Glases in einer Höhe von 6 cm. Berechnen Sie die Höhe des Glases unter der Voraussetzung, dass der Rand etwa 2 mm stark ist.

Vom Boden (links) aus gemessen befindet sich die Höhe 6 cm bei x = 5.

$$d_{innen}(6) = 2 \cdot f(5) = 2{,}6 \cdot \sqrt{5} \approx 5{,}82 \text{ cm}$$

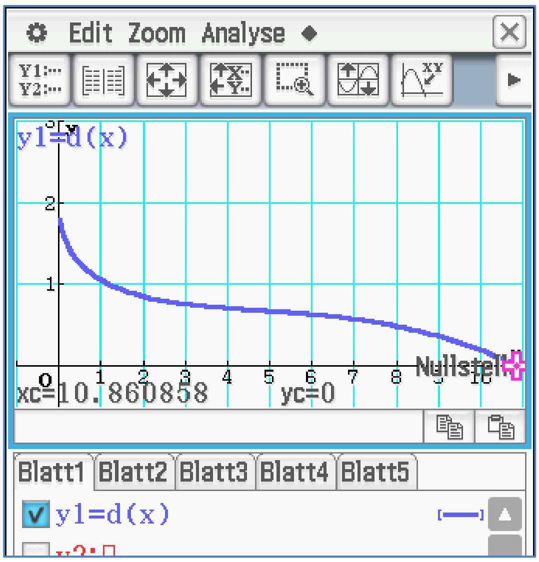


Die Dicke des Glases wird beschrieben durch die Funktion d mit $d(x) = a(x) - f(x)$

Mit CAS ermittelt man:

Die Dicke des Glases beträgt 2 mm bei $x \approx 9{,}94$ cm, d.h. h = 10,94 cm ist die Höhe des Glases, gerundet: 10,9 cm.

Weisen Sie nach, dass die Dicke der Glaswand von unten nach oben betrachtet ständig geringer wird.



Zu zeigen ist, dass die Funktion d streng monoton fällt. Doch da „mein" CAS die Gleichung $d'(x) > 0$ nicht lösen kann, wähle ich die graphische Lösung. Man erkennt, dass $d(x) > 0$ ist für $0 < x < 10{,}87$ und abnimmt!

Da gibt es nun ein kleines Problem, denn bei der ermittelten Glashöhe von 10,94 cm kann die Dicke des Glases in der Höhe 10,87 cm nicht Null sein. Hier stößt das mathematische Modell an seine Grenzen.

1.2 Dieses etwa 11 cm hohe Glas soll zu zwei Dritteln des möglichen Gesamtvolumens mit Flüssigkeit gefüllt werden.
Ermitteln Sie, wie weit die Flüssigkeit unterhalb des Randes steht.

Das maximale Gesamtvolumen des gefüllten Glases ist das Volumen eines Rotationskörpers.

$$V = \pi \cdot \int_0^{10} (f(x))^2 dx = \pi \cdot \int_0^{10} 1{,}69 \cdot x\, dx = \pi \left[\tfrac{1}{2} \cdot 1{,}69 \cdot x^2 \right]_0^{10} = \tfrac{1}{2} \cdot 169\pi \approx 265{,}46 \left(cm^3 \right)$$

Volumenfunktion bei beliebiger Füllhöhe h:

$$V = \pi \cdot \int_0^{h} (f(x))^2 dx = \pi \cdot \int_0^{h} 1{,}69 \cdot x\, dx = \pi \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 1{,}69 \cdot \left[x^2 \right]_0^{h} = \tfrac{1}{2} \cdot 1{,}69\pi \cdot h^2$$

Die Füllmenge soll zwei Drittel von 265,46 cm^3 sein:

$$\tfrac{1}{2} \cdot 1{,}69\pi \cdot h^2 = \tfrac{2}{3} \cdot 265{,}46$$

Ergebnis (CAS): $h \approx 8{,}16$ (cm)

Das sind ca. 1,8 cm unterhalb des Randes (bei 10 cm).

Berechnen Sie die Größe des evakuierten Raumes.

Ich nehme an, dass damit das Volumen des massiven Glasmaterials gemeint ist.
Volumen des vollen Glases inklusive Glasmaterial:

$$V = \pi \int_{-1}^{10} (a(x))^2\, dx \approx 396{,}41 \quad (cm^3)$$

```
π∫_{-1}^{10} (a(x))^2 dx
                    396.41
Ans−265.46
                    130.95
```

abzüglich Füllvolumen:

Ergebnis: $V_{Glasmenge} \approx 131\ cm^3$

1.3 In der Höhe von 8,5 cm wird zur Verzierung ein Schliff parallel zum Boden rund um das Glas ausgeführt. Drei weitere Schliffe führen von diesem ersten aus senkrecht bis zum Boden.
Berechnen Sie die Zeit zum Anbringen aller dieser Verzierungen, wenn für 1 cm etwa 6 Sekunden benötigt werden.

Der 1. Schliff ist eine Kreislinie bei x = 7,5. Der Radius ist $a(7{,}5)$. Die Länge der Linie ist der Kreisumfang: $L_1 = 2\pi \cdot a(7{,}5) \approx 2\pi \cdot 4{,}09 \approx 25{,}7 \quad (cm)$

Die drei weiteren Schliffe haben die Länge des Kurvenbogens von y = a(x) von x = -1 bis x = 7,5:

$$L_2 = \int_{-1}^{7{,}5} \sqrt{1 + \left(a'(x) \right)^2}\, dx \approx 8{,}86\,(cm)$$

```
2π*a(7.5)
                    25.7022
Define a1(x)=d/dx(a(x))
                       done
∫_{-1}^{7.5} √(1+(a1(x))^2) dx
                     8.8574
3*ans+25.7
                    52.2722
ans*6
                   313.6330
```

Gesamtlänge: $L = L1 + 3 \cdot L2 \approx 52{,}3$ cm

Benötigte Zeit: $t = 52{,}3 \cdot 6\ s \approx 314\ s = 5{,}23\,min = 5\,min\ 14s$

Stochastik-Teil

1.4 Man weiß aus Erfahrung, dass bei der Produktion dieser Isoliergläser fehlerhafte Produkte mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 1,5 % auftreten. Eine Tagesproduktion umfasst 2000 Gläser.

1.4.1 Geben Sie den Erwartungswert an und berechnen Sie die Standardabweichung für die zufällige Anzahl fehlerhafter Gläser in einer Tagesproduktion.

Es sei X die Anzahl der fehlerhaften Isoliergläser. X ist binomial verteilt mit $p \approx 1{,}5\% = 0{,}015$.

Umfang der Stichprobe: $n = 2000$.

Erwartungswert: $E(X) = n \cdot p = 2000 \cdot 0{,}015 = 30$

Standardabweichung: $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{30 \cdot 0{,}985} \approx 5{,}44$

1.4.2 Ermitteln Sie die Höchstzahl fehlerhafter Gläser in der Tagesproduktion, bis zu der man mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % noch davon ausgehen kann, dass sich die Fehlerquote nicht erhöht hat.

Vorarbeit:

Umfang der Stichprobe: n = 2000

X = Anzahl der fehlerhaften Isoliergläser. X ist binomial verteilt mit $p \approx 1{,}5\% = 0{,}015$.

Erwartungswert $E(X) = 30$

Ergebnismenge von X: $S = \{\underbrace{0;1;\ldots;\boxed{30};\ldots;k}_{A} \mid \underbrace{k+1;\ldots;2000}_{\overline{A}}\}$

Testansatz:

Nullhypothese: $p \le 0{,}015$

Um die Entscheidungsgrenze k zu bestimmen ist das Signifikanzniveau 5% gegeben.

Es soll also gelten: $P(\overline{A}) \le 0{,}05$, d. h. $P(X \ge k+1) \le 0{,}05$

Umstellen: $1 - P(X \le k) \le 0{,}05$ bzw. $P(X \le k) \ge 0.95$

Die Lösung dieser Ungleichung hängt davon ab, welche Hilfsmittel man zur Verfügung hat.

(1) Man kann k durch Probieren finden:

Ergebnis: $k = 39$.

```
binomialCDf(0,38,2000,0.015)
                        0.936612
binomialCDf(0,39,2000,0.015)
                        0.955004
```

(2) Man kann eine Folge definieren und deren Wertetafel anzeigen lassen:

```
Define g(n)=binomialCDf(0,n,2000,0.015)
                                   done
```

```
Rekursiv  Explizit
☑ anE=g(n)
☐ bnE: 
☐ cnE: 
```

n	anE
36.0000	0.8821
37.0000	0.9126
38.0000	0.9366
39.0000	0.9550
40.0000	0.9687
41.0000	0.9787

(3) Manche Rechner besitzen aber auch die inverse Funktion zu BinomialCDF.

```
invBinomialCDf
prob      0.95
Umfang n  2000
pos       0.015
```

```
invBinomialCDf(0.95,2000,0.015)
                          39.00
```

Der Rechner berechnet aus der Gleichung $P(X \le k) = 0{,}95$ einen Näherungswert für k, hier k = 39. Man überprüft dann, dass auch gilt $P(X \le 39) \ge 0.95$

Damit lautet der Annahmebereich $A = \{0;1;\ldots;39\}$.

Lösung B2 Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem kann die Lage der Startbahn eines Flughafens folgendermaßen beschrieben werden: Die x-Achse verläuft von Westen nach Osten und die y-Achse von Süden nach Norden. Die z-Koordinate entspricht der Höhe (alle Einheiten in km). Die 3,5 km lange Startbahn beginnt im Koordinatenursprung und verläuft in Nord-Ost-Richtung, die Spitze eines Sendemastes befindet sich im Punkt $S(-1\,|\,-1\,|\,0{,}02)$.

Die bei den nachfolgenden Flugzeugen betrachteten Abschnitte von Flugbahnen werden als Geraden modelliert.
Ein Flugzeug 1 fliegt in der Startphase von $A(6\,|\,6\,|\,1)$ nach $B(18\,|\,18\,|\,2)$, ein Flugzeug 2 befindet sich im Landeanflug von Punkt $C(-20\,|\,-22\,|\,6)$ in Richtung zum Punkt $D(-8\,|\,-10\,|\,5)$.

2.1 Berechnen Sie den Steigungswinkel von Flugzeug 1 auf dem Weg von A nach B.

Hier sucht man den Winkel zwischen der Fluggeraden (AB) und der xy-Ebene.

$$\sin(\alpha) = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}12\\12\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{144+144+1}\cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{289}} \quad\Rightarrow\quad \alpha \approx 3{,}37^{\circ}$$

2.2 Zum selben Zeitpunkt, in dem sich Flugzeug 1 im Punkt A befindet, passiert Flugzeug 2 den Punkt C. Nach welcher Zeit haben beide Flugzeuge die gleiche Flughöhe, wenn man voraussetzt, dass sich beide mit einer konstanten Geschwindigkeit von 250 km/h bewegen.

Flugbahn 1: $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix}6\\6\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}12\\12\\1\end{pmatrix}$

Flugbahn 2: $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix}-20\\-22\\6\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}12\\12\\-1\end{pmatrix}_{CD}$

t ist die vergangene Zeit nach Passieren der Punkte A bzw. C. Da sie gleich schnell fliegen kann man für beide Geraden t verwenden.

Gleiche Höhe bedeutet gleiche z-Koordinaten: $1+t = 6-t \;\Leftrightarrow\; 2t = 5 \;\Leftrightarrow\; t = 2{,}5$.

Nun ist t noch keiner Zeiteinheit zuzuordnen. Man muss sie aus der zurückgelegten Strecke und der gegebenen Geschwindigkeit berechnen.

$$\vec{x}_1(2{,}5) = \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\6\\1\end{pmatrix} + 2{,}5\cdot\begin{pmatrix}12\\12\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}36\\36\\3{,}5\end{pmatrix} \quad \text{d. h.} \quad P_1(36\,|\,36\,|\,3{,}5)$$

Zurückgelegte Wegstrecke: $s = \left|\overrightarrow{AP_1}\right| = \left|\begin{pmatrix}30\\30\\2{,}5\end{pmatrix}\right| = \sqrt{900+900+6{,}25} \approx 42{,}5 \;(\text{km})$

Geschwindigkeit: $v = 250\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

Gleichförmige Bewegung: $v = \frac{s}{t} \;\Rightarrow\; t = \frac{s}{v} = \frac{42{,}5}{250}\,\text{h} \approx 0{,}17\,\text{h} = 10{,}2\,\text{min}$

Ergebnis: Nach 10,2 Minuten befinden sich die Flugzeuge auf gleicher Höhe.

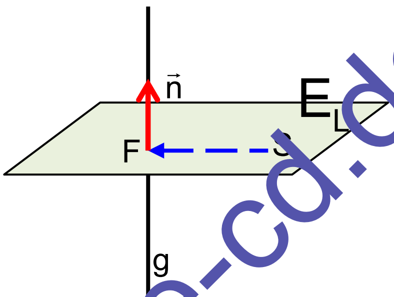
2.3 Bestimmen Sie die kürzeste Entfernung des zweiten Flugzeuges zur Spitze des Sendemastes.

Gegeben: Flugbahn des 2. Flugzeugs: g: $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix}-20\\-22\\6\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}12\\12\\-1\end{pmatrix}$

Spitze des Sendemastes: $S(-1|-1|0{,}02)$

Gesucht: Abstand des Punktes S von g.

2 Lösungsmethoden: (Siehe Text 64150)



1. Methode: mit Lotebene durch S, senkrecht zu g.

Der Richtungsvektor von g wird zum Normalenvektor von E_L

$$12x + 12y - z = d$$

Punktprobe mit $S(-1|-1|0{,}02)$:

$$d = -12 - 12 - 0{,}02 = -24{,}02$$

Lotebene E_L: $12x + 12y - z = -24{,}02$

Schneidet man E_L mit g, erhält man den Lotfußpunkt F:

$$12\cdot\boxed{-20+12t} + 12\cdot\boxed{-22+12t} - \boxed{6-t} = -24{,}02$$

$$289t = 485{,}98 \quad\Rightarrow\quad t = \frac{485{,}98}{289} \approx 1{,}68$$

Lotfußpunkt: $\vec{f} = \begin{pmatrix}-20\\-22\\6\end{pmatrix} + \boxed{1{,}68}\cdot\begin{pmatrix}12\\12\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}16\\-1{,}84\\4{,}32\end{pmatrix} \Leftrightarrow F(0{,}16|-1{,}84|4{,}32)$

Gesuchter Abstand: $d = \left|\overrightarrow{SF}\right| = \left|\begin{pmatrix}1{,}16\\-0{,}84\\4{,}3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{1{,}16^2 + 0{,}84^2 + 4{,}3^2} \approx 4{,}53 \ (\text{km})$

Hier eine raffinierte CAS-Lösung dieser Methode:

Zuerst wird g als Funktion von t definiert.

Dann zeige ich die Normalengleichung der Lotebene:
Sie heißt allgemein $\vec{n}\cdot\vec{x} = \vec{n}\cdot\vec{s}$

Nun schneide ich g und E_L, indem ich g(t) für $\vec{x}$ ersetze.

Die Lösung ist t = 1,68

Den Schnittpunkt F erhält man durch g(1,68).

Der gesuchte Abstand ist $d = \left|\overrightarrow{SF}\right| = \left|\vec{f} - \vec{s}\right| = 4{,}53 \ (\text{km})$

$\text{Define } g(t) = \begin{bmatrix}-20+12t\\-22+12t\\6-t\end{bmatrix}$ done

$\text{dotP}\left(\begin{bmatrix}12\\12\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right) = -24.02$

$12.00\cdot x + 12.00\cdot y - z = -24.02$

$\text{Solve}\left(\text{dotP}\left(\begin{bmatrix}12\\12\\-1\end{bmatrix}, g(t)\right) = -24.02, t\right)$

$\{t=1.68\}$

$g(1.68)$

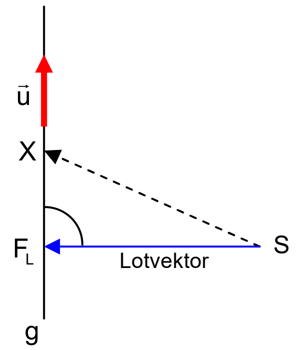
$\begin{bmatrix}0.16\\-1.84\\4.32\end{bmatrix}$

$\text{norm}\left(g(1.68) - \begin{bmatrix}-1\\-1\\0.02\end{bmatrix}\right)$

4.53

Wenn man schon so tolle Rechner hat, sollte man auch richtig mit ihnen umgehen können!

2. Methode: Die operative Methode.



Man wählt als Vorstadium für den Lotfußpunkt F einen

beliebigen Punkt der Geraden g: $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -20 \\ -22 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix}$,

nämlich $X(-20+12t \mid -22+12t \mid 6-t)$.

Dann berechnet man $\overrightarrow{SX} = \begin{pmatrix} -20+12t \\ -22+12t \\ 6-t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0{,}02 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19+12t \\ -21+12t \\ 5{,}98-t \end{pmatrix}$.

Unter der Bedingung: $\overrightarrow{SF} \cdot \vec{u} = 0$ erreicht man, dass $\overrightarrow{SX} \perp g$ wird, d. h. dass X zum Lotfußpunkt F wird:

$$\begin{pmatrix} -19+12t \\ -21+12t \\ 5{,}98-t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 12 \cdot (-19+12t) + 12 \cdot (-21+12t) - (5{,}98-t) = 0$$

d. h. $t = 1{,}68$

Nebenrechnung mit CAS:

Zuerst wird die Geradengleichung als g(t) definiert.

Dann löst man die Bedingung für die Orthogonalität.

Zu t = 1,68 gehört der Lotfußpunkt:

$F(0{,}16 \mid -1{,}84 \mid 4{,}32)$

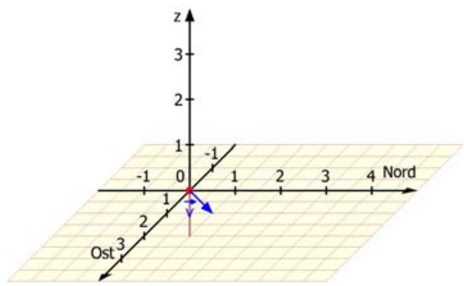
Gesucht ist der Abstand S von g,
also $d(S,g) = |\overrightarrow{SF}| = 4{,}53$ km

```
Define g(t)=[-20+12t; -22+12t; 6-t]
                                              done
solve(dotP(g(t)-[-1; -1; 0.02],[12; 12; -1])=0,t)
                                            {t=1.68}
g(1.68)
                                         [0.16; -1.84; 4.32]
norm(g(1.68)-[-1; -1; 0.02])
                                                4.53
```

2.4 Begründen Sie, dass der Punkt $E(2 \mid 2 \mid 0)$ auf der Startbahn liegt.

Die 3,5 km lange Startbahn beginnt im Koordinatenursprung und verläuft in Nord-Ost-Richtung.

Richtungsvektor für die Richtung NO ist; $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$



Startbahn: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. nur $\vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Der zulässige Parameter wird durch die Angabe 3,5 km eingeschränkt. Wegen $|\vec{v}| = \sqrt{2}$ gilt

$$s \cdot \sqrt{2} \le 3{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad s \le \frac{3{,}5}{\sqrt{2}} = 2{,}475.$$

E liegt also auf der Startbahn, wenn für seinen Parameter gilt: $0 \le s \le 2{,}475$

Punktprobe: $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad s = 2$, d. h. E liegt auf der Startbahn.

Gäste auf der Besucherterrasse des Flughafengebäudes haben den Start von Flugzeug 1 beobachtet. Es war deutlich zu erkennen, dass das Flugzeug vom Abheben von der Startbahn bis zum Punkt A deutlich steiler aufgestiegen ist als später von A nach B.

Ein Gast behauptet: Das waren ja mindestens 30 Grad". Überprüfen Sie diese Behauptung.

Überlegung: Hebt F1 erst am Ende der Startbahn ab, dann erhält man den maximalen Winkel:

Den Endpunkt der Startbahn erhält man für s = 2,475:

$$\vec{z} = 2{,}475 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2{,}475\\2{,}475\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow Z(2{,}475\,|\,2{,}475\,|\,0):$$

$$\text{Dann ist } \overrightarrow{ZA} = \begin{pmatrix}6\\6\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2{,}475\\2{,}475\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3{,}525\\3{,}525\\1\end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \sphericalangle\left(\vec{v}, \overrightarrow{ZA}\right) = \sphericalangle\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3{,}525\\3{,}525\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$\cos(\beta_1) = \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3{,}525\\3{,}525\\1\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 \cdot 3{,}525^2 + 1^2}} = \frac{7{,}05}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{25{,}85}} \Rightarrow \beta_1 = \cos^{-1}\left(\frac{7{,}05}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{25{,}85}}\right) \approx 11{,}34^\circ$$

Ergebnis: Die Behauptung des Gastes ist falsch.

Später hat sich ein drittes Flugzeug von dieser Startbahn vom Startpunkt E aus mit einem konstanten Steigungswinkel von 10,5° zum Punkt A bewegt. Bestimmen Sie die Koordinaten von E.

Ansatz: $E(s\,|\,s\,|\,0)$

Damit erhält man als Steigungswinkel $\beta_3 = \sphericalangle\left(\vec{v}, \overrightarrow{EA}\right) = \sphericalangle\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6-s\\6-s\\1\end{pmatrix}\right)$

mit $$\cos(\beta_3) = \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}6-s\\6-s\\1\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 \cdot (6-s)^2 + 1}} = \frac{|12-2s|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 \cdot (6-s)^2 + 1}}$$

Da $\beta_3 = 10{,}5^\circ$ ist, folgt: $$\frac{|12-2s|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 \cdot (6-s)^2 + 1}} = \cos(10{,}5^\circ)$$

CAS: Die 1. Zeile verwendet die nur bei CASIO vorgesehene Funktion angle, mit der man einen Winkel zwischen zwei Vektoren berechnet.

Die 2. Zeile löst die manuell erstellte Gleichung. s = 9,82 gehört nicht mehr zur Landebahn.

$$\text{Solve}\left(\text{angle}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}6-s\\6-s\\1\end{bmatrix}\right)=10.5, s\right)$$
$$\{s=2.18\}$$
$$\text{Solve}\left(\frac{\text{abs}(12-2s)}{\sqrt{2}*\sqrt{2(6-s)^2+1}}=\cos(10.5), s\right)$$
$$\{s=2.18, s=9.82\}$$

Daraus folgt E:

$$\vec{e} = 2{,}18 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow E(2{,}18\,|\,2{,}18\,|\,0)$$

2.5 Die Besucherterrasse wird von einem Sonnensegel in Dreiecksform beschattet. Bei leerer Terrasse fällt der Schatten des Segels vollständig auf den Terrassenboden. Der Boden liegt in der Ebene T mit der Gleichung: $z-0{,}01=0$. Die Eckpunkte des Sonnensegels befinden sich in den Punkten $U(0{,}5\,|\,0{,}005\,|\,0{,}015)$, $V(0{,}49\,|\,0\,|\,0{,}012)$, $W(0{,}51\,|\,0\,|\,0{,}012)$.

Die Sonnenstrahlen verlaufen in Richtung $\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}$

Berechnen Sie die Größe der Fläche des Sonnensegels in m^2
Vergleichen Sie diese Größe mit der Größe des Schattens des Sonnensegels.

Flächeninhalt eines Dreiecks:

$$A_{UVW}=\tfrac{1}{2}\cdot\left|\overline{UV}\times\overline{UW}\right|=\tfrac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}-10\\-5\\-3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}10\\-5\\-3\end{pmatrix}\right|=\tfrac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\-60\\100\end{pmatrix}\right|\approx 58{,}31\ \left(m^2\right)$$

Achtung: Ich habe dazu die Koordinaten von km in m umgerechnet!

```
crossp([-10;-5;-3],[10;-5;-3])
                        [0.00; -60.00; 100.00]
norm(ans)/2
                        58.31
```

Projektion des Dreiecks auf den Terrassenboden.

Projektionsgerade für $U(500\,|\,5\,|\,15)$: $\vec{x}=\begin{pmatrix}500\\5\\15\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}$

Schnitt mit $z=10$ $\quad 15-r=10 \Rightarrow r=5 \Rightarrow \vec{u}'=\begin{pmatrix}500\\5\\15\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow U'(515\,|\,-5\,|\,10)$

Projektionsgerade für $V(490\,|\,0\,|\,12)$: $\vec{x}=\begin{pmatrix}490\\0\\12\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}$

Schnitt mit $z=10$ $\quad 12-r=10 \Rightarrow r=2 \Rightarrow \vec{v}'=\begin{pmatrix}490\\0\\12\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow V'(496\,|\,-4\,|\,10)$

Projektionsgerade für $W(510\,|\,0\,|\,12)$: $\vec{x}=\begin{pmatrix}510\\0\\12\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}$

Schnitt mit $z=10$ $\quad 12-r=10 \Rightarrow r=2 \Rightarrow \vec{w}'=\begin{pmatrix}510\\0\\12\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow W'(516\,|\,-4\,|\,10)$

Flächeninhalt eines projizierten Dreiecks:

$$A_{U'V'W'}=\tfrac{1}{2}\cdot\left|\overline{U'V'}\times\overline{U'W'}\right|=\tfrac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}-19\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right|=\tfrac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\0\\-20\end{pmatrix}\right|=10\ \left(m^2\right)$$

```
crossp([-19;1;0],[1;1;0])
                        [0.00; 0.00; -20.00]
norm(ans)/2
                        10.00
```

Ergebnis:

Die Schattenfläche ist kleiner als die Fläche des Sonnensegels.